Dept. de Vibraciones y Aeroelasticidad
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

AEROELASTICIDAD DINÁMICA («FLUTTER»)

OBJETIVO: Profundizar en el conocimiento de las fuerzas aerodinámicas no estacionarias (desfase, amortiguamiento, etc...) e introducir el concepto de *Aeroservoelasticidad* en un ejemplo 2D sencillo.

Enunciado: Asumiendo flujo incompresible demostrar que un solo grado de libertad basado en el modo de flexión de ala no puede inducir flameo. Utilícese como primera aproximación la sección típica 2D con la misma notación explicada en las clases teóricas (masa del perfil M, rigidez a flexión K_h, desplazamiento positivo hacia abajo h, etc.) y considérese amortiguamiento estructural nulo en primera aproximación.
A continuación, asumir que la mitad posterior del perfil (de $x = 0$ a $x = c/2$) actúa como superficie de control con deflexión δ_c proporcional a la magnitud de la flexión h, es decir, $\delta_c = f_c \cdot (2h/c)$. Asumir movimiento casi-estacionario ($C(k) \to 1$) y comprobar que en este caso es posible obtener un valor de f_c que hace inestable el sistema.

Homework: Calcular el momento M_δ que debe introducir el actuador en la superficie de control. Considerar I_δ como momento de inercia de la superficie de control respecto al eje de charnela y K_δ la rigidez a rotación de la superficie de control.

Solución:
La ecuación de la sección típica 2D con un único grado de libertad de movimiento de flexión es:

$$M\ddot{h} + K_h h = Q_h$$

donde se ha considerado amortiguamiento estructural nulo en primera aproximación. La fuerza aerodinámica generalizada se escribe como:

$$Q_h = -\pi\rho_\infty \left(\frac{c}{2}\right)^2 \ddot{h} - 2\pi\rho_\infty U_\infty^2 \cdot \frac{c}{2} \cdot C(k)\, \frac{\dot{h}}{U_\infty}$$

Asumiendo movimiento armónico y adimensionalizando por Mb

$$-\omega^2 M\bar{h} + K_h\bar{h} = +\pi\rho_\infty \left(\frac{c}{2}\right)^2 \omega^2\bar{h} - 2\pi\rho_\infty U_\infty^2 \cdot C(k) \cdot i\frac{\omega c}{2U_\infty}\bar{h}$$

$$-\omega^2\frac{\bar{h}}{c/2} + \omega_h^2\frac{\bar{h}}{c/2} = +\frac{\pi\rho_\infty(c/2)^2}{M}\omega^2\frac{\bar{h}}{c/2} - 2\frac{\pi\rho_\infty(c/2)^2}{M}\frac{U_\infty^2}{(c/2)^2} \cdot C(k) \cdot i\frac{\omega c}{2U_\infty}\frac{\bar{h}}{c/2}$$

$$-\frac{\bar{h}}{c/2} + \frac{\omega_h^2}{\omega^2}\frac{\bar{h}}{c/2} = \frac{\pi\rho_\infty(c/2)^2}{M}\frac{\bar{h}}{c/2} - 2\frac{\pi\rho_\infty(c/2)^2}{M}\frac{U_\infty^2}{\omega^2(c/2)^2} \cdot C(k) \cdot i\frac{\omega c}{2U_\infty}\frac{\bar{h}}{c/2} = \frac{1}{\mu}\frac{\bar{h}}{c/2} - \frac{1}{2\pi\mu k^2}4\pi ikC(k)\frac{\bar{h}}{c/2}$$

$$-\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\frac{\bar{h}}{c/2} + \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right)^2\frac{\bar{h}}{c/2} = -\frac{1}{2\pi\mu k^2}\left[F(k) + iG(k)\right]4\pi ik\frac{\bar{h}}{c/2}$$

La solución no trivial de la ecuación anterior se obtiene anulando la parte real e imaginaria de:

$$1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\pi\mu k^2}\left[F(k) + iG(k)\right]4\pi ik - \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right)^2 = 0 + i0$$

Sin embargo, la parte imaginaria es proporcional a $F(k)$ que siempre es positiva. Por tanto, el sistema no puede llegar a tener flutter con un sólo grado de libertad en flexión.
A continuación se considera un grado de libertad adicional: rotación de superficie de control δ. En este caso, la fuerza generalizada se escribe:

$$Q_h = -\rho_\infty(c/2)^2\left(\pi\ddot{h} - U_\infty T_4\dot{\delta} - T_1\frac{c}{2}\ddot{\delta}\right) - 2\pi\rho_\infty U_\infty\frac{c}{2}C(k)\left(\dot{h} + \frac{1}{\pi}T_{10}U_\infty\delta + \frac{c/2}{2\pi}T_{11}\dot{\delta}\right)$$

$$\bar{Q}_h = -\rho_\infty(c/2)^2\left(-\pi\omega^2\bar{h} - U_\infty T_4 i\omega\bar{\delta} + T_1\frac{c}{2}\omega^2\bar{\delta}\right) - 2\pi\rho_\infty U_\infty\frac{c}{2}C(k)\left(i\omega\bar{h} + \frac{1}{\pi}T_{10}U_\infty\bar{\delta} + \frac{c/2}{2\pi}T_{11}i\omega\bar{\delta}\right)$$

$$\bar{Q}_h = -\rho_\infty\frac{c}{2}\left(-\pi\frac{\bar{h}}{c/2}\frac{\omega^2c^2}{4U_\infty^2}U_\infty^2 - U_\infty^2 T_4 i\frac{\omega c}{2U_\infty}\bar{\delta} + T_1\frac{\omega^2c^2}{4U_\infty^2}U_\infty^2\bar{\delta}\right) - 2\pi\rho_\infty U_\infty^2\frac{c}{2}C(k)\left(i\frac{\omega c}{2U_\infty}\frac{\bar{h}}{c/2} + \frac{1}{\pi}T_{10}\bar{\delta} + \frac{1}{2\pi}T_{11}i\frac{\omega c}{2U_\infty}\bar{\delta}\right)$$

Adimensionalizando con $Mb\omega^2$:

$$\frac{\bar{Q}_h}{M\frac{c}{2}\omega^2} = \frac{1}{2\pi\mu k^2}\left(2\pi k^2\frac{\bar{h}}{c/2} + 2T_4 ik\bar{\delta} - 2T_1k^2\bar{\delta}\right) + \frac{1}{2\pi\mu k^2}C(k)\left(-4\pi ik\frac{\bar{h}}{c/2} - 4T_{10}\bar{\delta} - 2T_{11}ik\bar{\delta}\right)$$

Sustituyendo $\bar{\delta} = f_c\left(2\bar{h}/c\right)$ la ecuación anterior queda:

$$\frac{\bar{Q}_h}{M\frac{c}{2}\omega^2} = \frac{1}{2\pi\mu k^2}\left[\left(2\pi k^2 - 2T_1k^2f_c + 2T_4ikf_c\right) + C(k)\left(-4\pi ik - 4T_{10}f_c - 2T_{11}ikf_c\right)\right]\frac{\bar{h}}{c/2}$$

El amortiguamiento aerodinámico es nulo (condición de flutter) cuando la parte imaginaria de la ecuación anterior es nula. Asumiendo movimiento de baja frecuencia $k \to 0$ ($C(k) \simeq 1$):

$$2T_4kf_c - 4\pi k - 2T_{11}kf_c = 0 \Rightarrow f_c = \frac{2\pi}{T_4 - T_{11}}$$

Sustituyendo los valores de $T_4 = -\pi/2$ y $T_{11} = 2 + \pi/2$ (valores sustituyendo $c = 0$ en las expresiones obtenidas en la clase teórica):

$$f_c = \frac{2\pi}{-\frac{\pi}{2} - 2 - \frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{-2-\pi} = -\frac{2}{1+\frac{2}{\pi}}$$

Este resultado indica que existe una forma de mover la superficie de control que provoca la inestabilidad del sistema aeroelástico. Por tanto, ha habido un acoplamiento de las leyes de control con el sistema aeroelástico, lo que comúnmente se denomina *aeroservoelasticidad*.
El apartado «homework» se deja para el alumno. Habría que formular la ecuación de momentos respecto al eje de charnela de la superficie de control:

$$I_\delta \ddot{\delta} + K_\delta \delta = Q_\delta + M_\delta$$

donde M_δ es el momento necesario para forzar una rotación δ.